La méthode Monte-Carlo

DeriveXperts

19 mai 2011

Outline

Définition

Pas de définition exacte de la méthode Monte-Carlo, seulement un plan général (Wikipédia) :

1. Définir un domaine de résultats possibles,
2. Générer aléatoirement un certain nombre de résultats en suivant une loi de probabilité,
3. Faire un calcul à partir des résultats aléatoires,
4. Aggréger les résultats.

Exemple

Calcul du nombre π.

- Dessiner un carré (domaine de résultats),
- Disposer uniformément des objects identiques (grains de riz) sur le carré,
- Compter le nombre d'objets dans le cercle et dans le carré,
- Le ratio des deux décomptes est égal à $\pi/4$, multiplier par 4.

Génération de nombre aléatoires

Deux choix possibles :

- Utilisation de véritables nombres aléatoires $\rightarrow$ très complexe,
- utilisation de suites de nombres pseudo-aléatoires

Les nombres pseudo-aléatoires

Définition

Une suite de nombres pseudo-aléatoires est suite de nombres qui a l'air aléatoire mais qui ne l'est pas. C'est à dire :

- *à partir d'un indice donné dans la suite, la même séquence se répète toujours,*
- *les séquences de nombres pseudo-aléatoires suivent certaines propriétés statistiques des nombres aléatoires.*

Exemple : nombre pseudo-aléatoires uniformes - Algorithme de Mersenne-Twister.

Domaines d'application

- Biologie,
- Statistiques,
- Telecoms,
- Finance,
- ...

Outline

Valorisation d'un flux financier

Définition

Soient S_t^i, $(1 \leq i \leq I)$ I *processus aléatoires (prix d'actions, ...). Sous une certaine probabilité dite "probabilité risque-neutre"* $\mathbb{Q}$, *un flux financier* Π_t *a une valeur en* $t = 0$ *égale à :*

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[DF(0,t) \times \Pi_t]$$

où $DF(0,t)$ *est le facteur d'actualisation entre* 0 *et* t.

Valorisation d'un produit dérivé de produits dérivés

Définition

Soient S_t^i, $(1 \leq i \leq I)$ *I processus aléatoires. Si on définit un produit dérivé comme la somme de J flux financiers* Π_j *à des instants* t_j, *pour* $1 \leq j \leq J$, *alors le produit dérivé a une valeur en* $t = 0$ *égale à :*

$$P_0 = \sum_{i=1}^{J} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[DF(0, t_j) \times \Pi_j]$$

où $DF(0, t_j)$ *est le facteur d'actualisation entre* 0 *et* t_j.

Définitions

- S_t^i, $(1 \leq i \leq I)$ sont I processus aléatoires.
- Il est possible de simuler conjointement les I processus.
- $P_0(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_J)$ est le prix en 0 du produit dérivé égal à la somme des flux P_j aux dates t_j, pour $1 \leq j \leq J$.
- t_c, pour $1 \leq c \leq C$, sont les dates de constatations nécessaires au calcul des flux (Exemple : call asiatique).

Algorithme - Etape 1

K simulations. Pour chaque simulation :

- Simulation jointe des I processus aléatoires,
- à toutes les dates de constatations t_c.

La k-ième simulation de S^i à la date t_c est $S^i_{t_c}(k)$

Algorithme - Etape 2

Pour chaque simulation k :

- calcul de chaque flux aux dates t_j,
- calcul de chaque facteur d'actualisation aux dates t_j de paiement des flux.

la valeur du j-ième flux pour la k-ième simulation s'écrit $\Pi_j^{(k)}$, la valeur du j-ième facteur d'actualisation pour la k-ième simulation s'écrit $DF^{(k)}(0, t_j)$.

Algorithme - Etape 3

Calcul du prix du dérivé :

- Pour chaque simulation k, prix $P_0^{(k)}(\Pi_1^{(k)}, ..., \Pi_J^{(k)}) = \sum_{i=1}^{J} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[DF^{(k)}(0, t_j) \times \Pi_j^{(k)}]$,
- Moyenne sur toutes les simulations :

$$\hat{P}_0 = \sum_{k=1}^{K} P_0^{(k)}(\Pi_1^{(k)}, ..., \Pi_J^{(k)})$$

$\hat{P}_0$ est une approximation de la valeur de P_0.

Remarques

- Méthodologie très générale,
- Plus le nombre de simus est important, plus la précision est grande (Possibilité d'intervalle de confiance),
- Dès que le nombre de sous-jacents est important $\longrightarrow$ utilisation de Monte-Carlo.

Utilisation Pratique

Call Worst-off ATM sur la pire performance, de maturité t, en EUR, sur 5 sous-jacents en EUR suivant un modèle Black-Scholes.

- Diffusion de S^i sous la probabilité risque-neutre :

$$dS_t^i = rS_t^i dt + \sigma^i S_t^i dW_t^i$$

r : le taux sans risque EUR, σ^i : volatilité, W_t^i : mouvement brownien (loi normale centrée de variance t).

- matrice de corrélation des browniens :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \rho_{1,4} & \rho_{1,5} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} & \rho_{2,5} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1 & \rho_{3,4} & \rho_{3,5} \\ \rho_{4,1} & \rho_{4,2} & \rho_{4,3} & 1 & \rho_{4,5} \\ \rho_{5,1} & \rho_{5,2} & \rho_{5,3} & \rho_{5,4} & 1 \end{pmatrix}$$

Implémentation - Etape 1 - Simulation des browniens

Pour chaque simulation k,

1. Simulation de 5 variables uniformes indépendantes (algorithme Mersenne-Twister par exemple) $u_1, \ldots, u_5$ **indépendantes de la simulation précédente**,
2. Transformation des v.a. uniformes en v.a. normales centrées de variance t :
    1. si $x \rightarrow \mathbb{P}[S > x]$: probabilité de distribution d'une v.a. S normale centrée de variance 1,
    2. $\Longrightarrow (N_1, \ldots, N_5) = (\mathbb{P}^{-1}[u_1], \ldots, \mathbb{P}^{-1}[u_5])$ sont 5 v.a. normales centrées de variance 1 indépendantes,
    3. $\Longrightarrow (V_t^1, \ldots, V_t^5) = (\sqrt{t} \times N_1, \ldots, \sqrt{t} \times N_5)$ sont 5 v.a. normales centrées de variance t indépendantes.

$(V_t^1, \ldots, V_t^5)$ sont donc 5 browniens indépendants.

Implémentation - Etape 2 - Corrélation des browniens

pour chaque simulation k, $(V_t^1, ..., V_t^5)$ 5 browniens indépendants :

1. Calcul de la matrice L telle que $M = L \times L^t$ (L^t est la tranqposée de L) par algorithme de Cholesky.
2. $W = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \\ W_t^3 \\ W_t^4 \\ W_t^5 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} V_t^1 \\ V_t^2 \\ V_t^3 \\ V_t^4 \\ V_t^5 \end{pmatrix}$ est alors le vecteur de browniens corrélés dont nous avons besoin.

Implémentation - Etape 3 - Calcul du flux

pour chaque simulation k, $(W_t^1, ..., W_t^5)$ 5 browniens corrélés comme souhaités :

1. Calcul de $S_t^i = S_0^i e^{(r-(\sigma^i)^2/2)\times t+\sigma_t^i W_t^i}$,
2. Calcul de la pire performance $WorstPerf = \min_{1\leq i\leq 5}(S_t^i / S_0^i - 1)$
3. Calcul du flux $\Pi_t = \max(0, WorstPerf)$
4. Calcul du facteur d'actualisation $DF(0, t) = e^{-rt}$

Implémentation - Etape 4 - Calcul du prix

Le prix du Worst-off call est donné par :

$$\hat{P}_0 = \sum_{k=1}^{K} e^{-rt} \times Pi_t^{(k)}$$

Cocktail

Champagne !